

複素構造と解析的・幾何学的不変量の統合的研究

Integrated Research of Analytic and Geometric Invariants of Complex Structure

野口 潤次郎 (Noguchi, Junjiro)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授



研究の概要

基礎解析、解析幾何学、代数幾何学の中で複素構造が本質的役割を果たす数学分野を統合的に研究するのが、当該研究の目的であり特色である。関連する分野は広い。例えば小林計量が有名であるが、これは値分布に密接に関係する。他にベルグマン計量など複数あり、これらを統合的に調べ、さらに周辺分野への研究手段を与える。

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：関数論・実関数論・多変数複素解析・多変数関数論・複素幾何

1. 研究開始当初の背景・動機

基礎解析、解析幾何学、代数幾何学の中で複素構造が本質的役割を果たす数学分野を統合的に研究するのが、当該研究の目的であり特色である。関連する分野は広い。例えば、ベルグマン計量は関数解析から代数幾何まで関係し、複素幾何での小林計量は、値分布論に密接に関係する。またコンパクトリーマン面のモジュライ空間上には種々の不変計量が知られている。当該研究ではこのような複素構造と種々の不変量を統合的に調べ、さらに周辺分野への研究手段を与える。

2. 研究の目的

大きく分けて次の研究項目を統合的に研究することを目的とする。(1) 複素解析的・幾何学的不変量を用いた多変数ネヴァンリンナ理論、特に高次元第二主要定理の確立と小林双曲的計量。(2) 複素解析的不変量 (Bergman計量、Carathéodory計量、小林計量)。(3) 擬凸領域上の特異計量付きの L^2 可積正則関数空間。(4) 複素微分幾何学における不変計量。(5) 調和解析、微分方程式からの複素構造解析。(6) 表現論的アプローチからの複素構造不変量の研究。(7) 複素多様体上の(特異)計量を用いた幾何学的不変量。(8) (強)擬凸境界の研究、コーシー・リーマン(CR)構造とそのモジュライ、不変量。(9) 複素代数幾何学的不変量、複素代数多様体のモジュライ空間。(10) タイヒミュラー空間の写像類群と不変量。(11) 複素葉層構造。

3. 研究の方法

平成16年度までの基盤研究(A)(1)の研究を引き継ぐ形で、研究期間全体を通して、研究代表者は、全体の総括をし、各分担者は、相互の連携を保ちつつ、それぞれ上述の研究項目を主に分担する。その際、適宜国内・外の研究者の協力を得る。そのため中期(1ヶ月程度)で海外の優秀な研究者を招聘し、共同研究・研究交流を行うと共に、過去12年間にわたり継続的に開催してきた国際研究集会「Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables」を活用し、共同研究・研究交流を行うと共に当該研究課題の国際発信に努める。同研究集会は、現在では国際知名度が高くなり、複素解析学分野での研究発表の場として国際的評価も高く確立してきた。またこれまでのデータベースを活用し、研究者間の国際的研究交流のためのネットワークの構築を行った。研究の新展開を図るには、国内・外研究者との幅の広い研究交流が不可欠である。分担者が組織者となって、構築されたネットワークを利用して国際研究集会を随時開催し、研究の活性化を図る。当該研究活動を高めるため研究分担者・連携研究者・研究協力者を国外の研究集会へ派遣し、研究交流、共同研究を積極的に行う。

4. これまでの成果

高次元ネヴァンリンナ理論では、準アーベル多様体への整正則曲線に対する第二主要定理が、打ち切りレベル1の個数関数が証明された(野口、J. Winkelmann、山ノ井)。

通常個数関数の打ち切りレベルは値域の多様体の次元に関係すると考えられてきただけに、レベル1で証明されたことは、これまでの予想を上回るものであり、正則曲線の代数退化問題や小林双曲性への応用が分かりつつある。例えば、対数的小平次元が正、対数的不正則指数が次元以上かつ準アルバネーゼ写像がプロパーな代数多様体への整正則曲線の代数退化性が証明された(野口、J. Winkelmann、山ノ井)。これは、1974年にM. Greenの提出した予想をより一般的な形で肯定的に解決するもので、今までに得られていた第二主要定理では証明できなかったものである。第二主要定理が確立されている場合は未だ少なく、今後の応用が大いに期待される。更に、山ノ井は、有理型関数体に対して打ち切りレベル1の個数関数による第二主要定理を証明した。この結果は、1929年のR. Nevanlinnaによる予想を最良の形で解決するもので、これまでICMの招待講演の中でも2回、重要問題として取り上げられてきた。証明の手法は、複素解析、代数幾何、トリー理論をまさに統合的に駆使する新しいアイデアに満ちたものである。この成果は、これまでの大方の予想を上回るもので、有理型関数体に対するYAMANOI'S ABC-THEOREMとも呼ばれ、多くの注目を集めている。2008年3月にパリで開催されたBourbakiセミナーにおいて、この成果を紹介する講演が行われた。研究成果がBourbakiセミナーで紹介されることは大変名誉なことで国際的評価の高い証である。

平地は、R. Grahamと共同でCR構造のモジュライ空間とQ曲率の研究を行った。奇数次元の場合は、Fefferman-Grahamによりモジュライの曲率テンソル空間への実現(埋め込み)が解析的手法により証明されている。これに表現論的手法を活用することで、変形複体の構成による別証明を与えた。更に、この方法でこれまで解析的方法だけでは困難であった偶数次元の場合に、モジュライ空間の曲率テンソル空間への実現を証明した。これにより、Fefferman-Grahamにより始められたアンビアント空間論は、一つの完成形をみたことになる。この研究手法は、更なる発展性を内包しており今後の更に深い研究が期待される。

高山は、一般型代数多様体に対して、その多重標準写像の有界性定理を証明した。同様な結果を同時期Hacon-McKernan等も独立に得ている。証明法は、共に研究協力者の辻のアイデアに基づく。この成果は、代数幾何学に於ける長年の懸案問題を解決する重要な成果である。

吉川は、3次元Calabi-Yau多様体のBCOV不変量の解析的トーションと対合付きK3

曲面の同変解析的振率の明示公式を研究し、それらが常にある一列の楕円モジュラー型式のBorchards積と井草保型型式の積として表されることを示した。また、関連するBorel-Voisin多様体のBCOV不変量を決定した。

児玉と清水は、スタイン多様体の中で複素平面、超球、単位円板(これを含む場合が最も難しい)でできる複素多様体を位相群としての正則自己同型群により特徴付けることに成功した。

5. これまでの進捗状況と今後の計画

この3年間で(1)(2)(6)(8)(9)では予想を上回る成果を得、他の研究項目においては予定の成果を得た。この課程で興味深い問題が浮上してきた。これ等を更に発展するかたちで研究項目を統合的に研究する。当該研究課題で得られた研究成果の国際発信に努める。2008年度にはフィールズ研究所(トロント)と協力して国際研究集会を開催し、当該研究者を派遣し、研究の活性化を図る。

6. これまでの発表論文等

(研究代表者は太字、研究分担者には下線)

J. Noguchi, J. Winkelmann, and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties II, to appear in Forum Math. (2008).

J. Noguchi, J. Winkelmann, and K. Yamanoi, Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties, J. Math. Pures Appl. 88(3) (2007), 293-306.
K. Yamanoi, The second main theorem for small functions and related problems, Acta Math. 192 (2004), 225-294.

K. Hirachi, Logarithmic singularity of the Szegő kernel and a global invariant of strictly pseudoconvex domains, Ann. Math. 163 (2006), 499-515.

K.-I. Yoshikawa, On the singularity of Quillen metrics, Math. Ann. 337 (2007), 61-89.

S. Takayama, Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, Invent. Math. 165, (2006), 551-587.

【授賞】

山ノ井克俊:2005年度日本数学会賞建部賢弘賞特別賞。

平地健吾:2006 Stefan Bergman 賞。

吉川謙一:日本数学会2007年度幾何学賞。

ホームページ等

<http://nogpc4.ms.u-tokyo.ac.jp/nog/>