

平成18年度科学研究費補助金（基盤研究（S））研究終了報告書

◆記入に当たっては、「平成18年度科学研究費補助金（基盤研究（S））研究終了報告書記入要領」を参照してください。

ローマ字		FUKAYA KENJI				
①研究代表者氏名		深谷 賢治			②所属研究機関・部局・職	京都大学・大学院理学研究科・教授
③研究課題名	和文	モジュライ空間・ホモトピー代数・場の理論				
	英文	Moduli space, Homotopical algebra, Field theory				
④研究経費 金額単位：千円	平成13年	平成14年度	平成15年度	平成16年度	平成17年度	総合計
	15,200	15,200	15,200	15,200	15,200	76,000
⑤研究組織（研究代表者及び研究分担者） *平成18年3月31日現在						
氏名	所属研究機関・部局・職		現在の専門	役割分担（研究実施計画に対する分担事項）		
深谷 賢治 小野 薫	京都大学・大学院理学研究科・教授 北海道大学・大学院理学研究科・教授		幾何学 微分幾何学	総括 シンプレクティック幾何学		
太田 啓史	名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教授		位相幾何学	特異点理論		
中島 啓 齋藤 政彦 河野 明 加藤 毅	京都大学・大学院理学研究科・教授 神戸大学・理学部・教授 京都大学・大学院理学研究科・教授 京都大学・大学院理学研究科・助教授		表現論 代数幾何学 位相幾何学 微分幾何学	表現論 代数幾何学 ホモトピー論 力学系理論		
望月 拓郎	京都大学・大学院理学研究科・助教授		微分幾何学	複素解析		
古田 幹雄	東京大学・大学院数理科学研究科・教授		位相幾何学	ゲージ理論		
⑥当初の研究目的（交付申請書に記載した研究目的を簡潔に記入してください。）						
<p>1. シンプレクティック幾何学の研究の中心としてフレアーホモロジー論を確立すること。 フレアーホモロジーが定義される正確な条件の設定とその不変性の確立。族の場合への一般化、やシンプレクティック多様体に対する種々の操作(手術など)についての性質の究明など。</p> <p>2. 弦理論との関係の追求。 種数の高いリーマン面(境界付き)などの場合も含める。これによって、チャーンサイモンズ摂動理論や、量子小平スペンサー理論との関係も理解したい。</p> <p>3. ホモロジー的ミラー対称性の証明。 フレアーホモロジーと層係数コホモロジーの関手的な同型の存在を予想するホモロジー的ミラー対称性を証明する。族のフレアーホモロジーの定義の厳密化、複素構造の量子変形の理解、種数1の場合の寄与の検討、などを考察する必要がある。</p> <p>4. 接触ホモロジーとの融合。 接触境界があるシンプレクティック多様体の、ラグランジュ部分多様体を境界に持つ概正則曲線を考えて、フレアーホモロジーの理論と接触ホモロジーの理論との融合をはかる。</p> <p>5. 局所ミラー対称性とグロモフ・ウィッテン不変量の特徴付け。 局所ミラー対称性と呼ばれる研究は深谷、小野が基本ホモロジー類の整数性に関わって研究したやりかたと関わりがあると思われる。</p> <p>6. ゲージ理論との関係。</p> <p>7. 代数的な研究との関係をつける。</p>						

⑦研究成果の概要（研究目的に対する研究成果を必要に応じて図表等を用いながら、簡潔に記入してください。）

1. ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー論の確立

当初の研究目的の中心であったこの点に関しては、深谷・太田・小野・Y-G Ohの共著である、Lagrangian intersection Floer homology - Anomaly and obstructionsの改訂版によって満足がいく形で、完成をみた。（この書物は3月末の時点で10章のうち8つの章、830ページが完成した。この8つの章については、成果報告書の一部として提出する。残りの2章（8章と10章）についても、数学的な内容は完成している。また、8章は現在校正段階にあり、10章は証明の細部のチェック、よりわかりやすい書き方などを検討している最中であり、あと数ヶ月以内には完成する予定である。）

この書物において、（相対スピン構造を持つ）ラグランジュ部分多様体に対して、そのコホモロジー群上のフィルター付きA無限構造を対応させる関手的対応が確立され、そのシンプレクティック幾何学への5でのべるような応用が行われた。（ミラー対称性との関係は3で述べる。）

前提となるフィルター付きA無限代数のホモトピー論の確立、量子変形がなくなる極限で有理ホモトピー型を再現することの証明（そのための摂動の連続族による仮想ホモロジー類の表現する手法）、多くの具体的計算例の計算（たとえば、ラグランジュ部分多様体の手術と擬正則円盤の関係）、チェインレベルの交点理論の基本的な手法の確立、代数的位相幾何学におけるA無限大空間の理論との関係の確立、などの新しい種々の手法を開発したが、これらが理論の完成には不可欠であった。

2. 弦理論との関係の追求

擬正則円盤のモジュライ空間に関しては、内点をmarked pointにもつ場合への理論の拡張を行った。これは、open closed string theoryの種数が0の場合にあたる。

この一般化を行う過程で、境界にmarked pointを持たない擬正則円盤のモジュライ空間を、安定写像を用いて「コンパクト化」すると、コンパクトにならないことを発見した。すなわち、無限遠に安定ではない写像を入れることがコンパクト化に不可欠であることが判明した。これは種数が高い（境界付き）擬正則曲線でも起きる。

この点を考慮に入れた正しい定式化を模索中である。

境界付き擬正則曲線の数え上げは、本研究の期間中に主として物理学者によって進展がなされているが、数え上げで得られる数は、数学的にwell definedでない。数え上げの意味を正しく理解するための基礎研究の出発点が本研究で与えられている。

3. ホモロジー的ミラー対称性

1で述べた諸結果により、この予想を数学的に正確に述べるのが可能になった。証明のための道筋としては、漸近展開による方法、rigid幾何学による方法等が有り、前者は深谷の論文（文献の2番目）で構想された。後者については、1で述べた書物の中で、実現のための枠組みを与え、特に形式スキームの直積上の接続層を、フレアーホモロジーの族として構成したことは、証明の出発点である。また、ループ空間を使う枠組み（文献の1番上）により、巡回対称性の証明や、弱い意味の収束証明がなされる予定であり、これが次のステップを与えると思われる。さらに、特異ファイバーの近くの族のフレアーホモロジーの漸近挙動を研究するという問題点も、1で述べた著書の10章で研究を開始している。

4. 接触ホモロジーとの関係

ループ空間を用いるフレアー理論の定式化により、接触ホモロジーとのただししい関係に関する予想が定式化され、また、そこで予想される同形の構成の一部（つまり片側の準同型の構成）も行うことができることが判明した。

5. シンプレクティックトポロジーへの応用

3次元の素な多様体が3次元複素ベクトル空間のラグランジュ部分多様体になるのは、円周を直積因子に持つときであることを証明した。関連して、トラスの複素ベクトル空間へのラグランジュ埋め込みのマスロフ指数に関する、オーダンの予想を一般のスピン $K(\pi, 1)$ 多様体へ拡張した形で証明した。（深谷）

フレアーホモロジーのねじれと交叉を解消するためにどの程度のホーファー距離ラグランジュ部分多様体を動かさなければいけないかの関係を明らかにした。また、ねじれ係数がホーファー距離についてリプシッツ定数1のリプシッツ関数であることを証明した。（1で述べた書物の6章。）

モノトーンラグランジュ部分多様体に対する、アーノルド・ギヴェンタルの予想を証明した。（1で述べた書物の8章。）

シンプレクティック微分同相群の中の完全シンプレクティック微分同相の作る部分群が $C1$ 位相で閉であるという、フラックス予想を証明した。（小野）

⑧特記事項 (この研究において得られた独創性・新規性を格段に発展させる結果あるいは可能性、新たな知見、当該研究分野及び関連研究分野への影響等、特記すべき事項があれば記入してください。)

仮想ホモロジー類を用いた対応(correspondence)によって、高次代数構造を構成し、そのホモトピー論(ホモロジー代数)を用いて種々の不変量を作り、それを幾何学あるいは位相的場の理論に応用するという手法は、現在シンプレクティック幾何学・ゲージ理論・代数的位相幾何学・低次元位相幾何学などでの分野での主要な手法になりつつある。

本研究、およびそれ以前に本研究の代表者分担者が行った諸研究は、このような潮流が形成される大きな要因になり、特にシンプレクティック幾何においては主要な要因であった。

本研究は、ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー論の場合に、この種のプロジェクト、すなわち、偏微分方程式を用いてモジュライ空間を作り、ホモロジー代数を用いてそれが表現すべき代数系の理論を構築し、仮想ホモロジー類を用いた位相幾何学的議論をモジュライ空間に適用して実際にそのような代数系を構成研究し、それを応用するというプロジェクトを一般的かつ厳密な形で確立した。

同様のプロジェクトが海外でいくつか進展中であるが、シンプレクティック幾何学におけるそれらは、本研究の影響下にあり、本研究の方法をまねて遂行されている。

本研究の過程で、代数幾何学の種々の部分とフレアーホモロジーの理論の類似がより深まった。すなわち、種々の変形理論や、ホモトピー代数、形式スキームやリジッド幾何、ガロア対称性など、代数幾何学の種々の側面が、フレアーホモロジーの理論に直接現れて重要な役割を果たしていることが明確になった。

本研究の過程で、場の量子論に現れる考え方が、より多く幾何学研究に入り込む糸口が開かれた。たとえば、ファインマン図式がモジュライ空間の研究とそれに関わるホモロジー代数の双方に自然に現れることが明確になった。さらに、チェインレベルの交点理論や、ホモロジー代数を用いた変形理論が、繰り込み理論と関わるのが次第に明確になってきている。

漸近展開を用いたミラー対称性の研究の中で、特殊関数の理論が、ミラー対称性と密接に関わることが明確になり、稠密に分布した無限枚の壁に関する壁越えを用いて、特殊関数を記述するという構想が生まれている。

本研究開始時におけるフレアー理論の応用は限定的であったが、本研究等によって、それが大きく広がってきている。たとえば、与えられた多様体にラグランジュ部分多様体として埋め込める多様体を決めるというたぐいの問題において、現在知られているほとんどすべての結果はフレアーホモロジーを用いて導けることが次第に明らかになりつつあり、また、「概要」で述べた結果など新しい結果も次々に生まれている。

本研究の代表者・分担者による、本研究に関わる諸研究は、諸方面から高く評価されている。本研究と関わりの深い研究によって、本研究の代表者分担者は次のような賞を(本研究期間中に)受賞している。

深谷は学士院賞および井上學術賞を受賞している。

中島はアメリカ数学会コール賞および學術振興会賞を受賞している。

小野は日本数学会秋季賞を受賞している。

望月は日本数学会春季賞を受賞している。

⑨研究成果の発表状況 (この研究費による成果の発表に限り、学術誌等に発表した論文 (掲載が確定しているものを含む。) の全著者名、論文名、学協会誌名、巻 (号)、最初と最後のページ、発表年 (西暦)、及び国際会議、学会、特許等の発表状況について記入してください。なお、代表的な論文3件に○を、また研究代表者に下線を付してください。)

論文

- [Fukaya, Kenji](#) Application of Floer homology of Lagrangian submanifolds to Symplectic Topology. in "Morse Theoretic methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology", ed. P. Biran etc. Nato Science Series II Vol 217, 231--276.
- [Fukaya, Kenji](#) Multivalued Morse theory, asymptotic analysis and mirror symmetry. *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*, 205--278, Proc. Sympos. Pure Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [Fukaya, Kenji](#) Galois symmetry on Floer cohomology. *Turkish J. Math.* **27** (2003), no. 1, 11--32.
- [Fukaya, Kenji](#) Deformation theory, homological algebra and mirror symmetry. *Geometry and physics of branes (Como, 2001)*, 121--209, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP, Bristol, 2003.
- [Fukaya, Kenji](#) Floer homology for families---a progress report. *Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000)*, 33--68, Contemp. Math., 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [Fukaya, Kenji](#) Floer homology and mirror symmetry. II. *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999)*, 31--127, Adv. Stud. Pure Math., 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [Fukaya, Kenji](#) Mirror symmetry of abelian varieties and multi-theta functions. *J. Algebraic Geom.* **11** (2002), no. 3, 393--512.
- Ono, Kaoru A short note on symplectic Floer theory. *Noncommutative geometry and physics*, 301--319, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- Ono, Kaoru J-holomorphic curves and symplectic topology [translation of Sugaku **51** (1999), no. 4, 357--376]
- Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru Simple singularities and symplectic fillings. *J. Differential Geom.* **69** (2005), no. 1, 1--42.
- Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru Symplectic 4-manifolds containing singular rational curves with $(2,3)$ -cusp. *Singularités Franco-Japonaises*, 233--241, Sémin. Congr., 10, Soc. Math. France, Paris, 2005.
- Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru Symplectic fillings of the link of simple elliptic singularities. *J. Reine Angew. Math.* **565** (2003), 183--205.
- Ono, Kaoru Simple singularities and symplectic fillings. *Integrable systems, topology, and physics (Tokyo, 2000)*, 195--197, Contemp. Math., 309, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- Ono, Kaoru Space of geodesics on Zoll three-spheres. *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999)*, 237--243, Adv. Stud. Pure Math., 34, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.
- [Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kota](#) Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Invent. Math.* **162** (2005), no. 2, 313--355.
- [Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kota](#) Instanton counting on blowup. II. \mathbb{K}^3 -theoretic partition function. *Transform. Groups* **10** (2005), no. 3-4, 489--519.
- [Nakajima, Hiraku](#) Quiver varieties and \mathbb{Z} -analogs of q -characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 3, 1057--1097.
- [Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kota](#) Lectures on instanton counting. *Algebraic structures and moduli spaces*, 31--101, CRM Proc. Lecture Notes, 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Nakajima, Hiraku](#) Extremal weight modules of quantum affine algebras. *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 343--369, Adv. Stud. Pure Math., 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- Beck, Jonathan; [Nakajima, Hiraku](#) Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras. *Duke Math. J.* **123** (2004), no. 2, 335--402.
- [Nakajima, Hiraku](#) Cells in quantum affine algebras. Proceedings of the International Conference on Algebra. *Algebra Colloq.* **11** (2004), no. 1, 141--154.
- [Nakajima, Hiraku](#) Reflection functors for quiver varieties and Weyl group actions. *Math. Ann.* **327** (2003), no. 4, 671--721.
- [Nakajima, Hiraku](#) \mathbb{Z} -analogs of q -characters of quantum affine algebras of type A_n . *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, 141--160, Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

⑨研究成果の発表状況（続き）（この研究費による成果の発表に限り、学術誌等に発表した論文（掲載が確定しているものを含む。）の全著者名、論文名、学協会誌名、巻（号）、最初と最後のページ、発表年（西暦）、及び国際会議、学会、特許等の発表状況について記入してください。なお、代表的な論文3件に○を、また研究代表者に下線を付してください。）

Nakajima, Hiraku t -analogs of q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory* **7** (2003), 259--274.

Nakajima, Hiraku Convolution on homology groups of moduli spaces of sheaves on $K3$ surfaces. *Vector bundles and representation theory (Columbia, MO, 2002)*, 75--87, *Contemp. Math.*, **322**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

Nakajima, Hiraku Hilbert schemes of points on surfaces and Heisenberg algebras [translation of Sugaku **50** (1998), no. 4, 385--398; MR1690690]. Sugaku expositions. *Sugaku Expositions* **15** (2002), no. 2, 207--222.

Nakajima, Hiraku Geometric construction of representations of affine algebras. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, 423--438, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

Saito, Masa-Hiko; Terajima, Hitomi Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations. *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004), no. 3, 529--568.

Inaba, Michi-aki; Iwasaki, Katsunori; Saito, Masa-Hiko Bäcklund transformations of the sixth Painlevé equation in terms of Riemann-Hilbert correspondence. *Int. Math. Res. Not.* **2004**, no. 1, 1--30.

Saito, Masa-Hiko; Takebe, Taro Classification of Okamoto-Painlevé pairs. *Kobe J. Math.* **19** (2002), no. 1-2, 21--50.

Saito, Masa-Hiko; Takebe, Taro; Terajima, Hitomi Deformation of Okamoto-Painlevé pairs and Painlevé equations. *J. Algebraic Geom.* **11** (2002), no. 2, 311--362.

Kono, Akira; Oshima, Hideaki Commutativity of the group of self-homotopy classes of Lie groups. *Bull. London Math. Soc.* **36** (2004), no. 1, 37--52.

Kamiyama, Yasuhiko; Kono, Akira; Tezuka, Michishige Cohomology of the moduli space of $SO(n)$ -instantons with instanton number 1. *Topology Appl.* **146/147** (2005), 471--487.

Hamanaka, Hiroaki; Kono, Akira An application of unstable K -theory. *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004), no. 2, 451--456

Kishimoto, Daisuke; Kono, Akira; Ohsita, Akihiro KO -theory of flag manifolds. *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004), no. 1, 217--227.

Kono, Akira A note on the Stiefel-Whitney classes of representations of exceptional Lie groups. *J. Math. Kyoto Univ.* **45** (2005), no. 1, 217--219.

Kono, Akira; Kuribayashi, Katsuhiko Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles. *Fund. Math.* **180** (2003), no. 3, 199--221.

Hamanaka, Hiroaki; Kono, Akira On $[X, U(n)]$ when $\dim X$ is $2n$. *J. Math. Kyoto Univ.* **43** (2003), no. 2, 333--348.

Kono, Akira; Nishimura, Osamu Homotopy normality of Lie groups and the adjoint action. *J. Math. Kyoto Univ.* **43** (2003), no. 3, 641--650.

Kono, Akira; Lin, James P.; Nishimura, Osamu Characterization of the mod 3 cohomology of $SO(7)$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 10, 3289--3295

Kono, Akira; Nishimura, Osamu Characterization of the mod 3 cohomology of the compact, connected, simple, exceptional Lie groups of rank 6. *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), no. 5, 615--623.

Kono, Akira; Kishimoto, Daisuke Topological characterization of extensor product on $B(U)$. *J. Math. Kyoto Univ.* **42** (2002), no. 2, 243--247.

Kono, Akira; Nishimura, Osamu On the cohomology mod 2 of $SO(8)$. II. *J. Math. Kyoto Univ.* **42** (2002), no. 2, 181--183.

Kato, Tsuyoshi Interacting maps, symbolic dynamics and automorphisms in microscopic scale. *Int. J. Pure Appl. Math.* **25** (2005), no. 3, 311--374.

Kato, Tsuyoshi ASD moduli spaces over four-manifolds with tree-like ends. *Geom. Topol.* **8** (2004), 779--830.

⑨研究成果の発表状況（続き）（この研究費による成果の発表に限り、学術誌等に発表した論文（掲載が確定しているものを含む。）の全著者名、論文名、学協会誌名、巻（号）、最初と最後のページ、発表年（西暦）、及び国際会議、学会、特許等の発表状況について記入してください。なお、代表的な論文3件に○を、また研究代表者に下線を付してください。）

Kato, Tsuyoshi Spectral analysis on tree like spaces from gauge theoretic view points. *Discrete geometric analysis*, 113--129, Contemp. Math., 347, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

Mochizuki, Takuro The 3-cocycles of the Alexander quandles $\mathbb{F}_q[T]/(T-\omega)$. *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), 183--205

Mochizuki, Takuro Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles. *J. Pure Appl. Algebra* 179 (2003), no. 3, 287--330.

Mochizuki, Takuro Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure. *J. Differential Geom.* 62 (2002), no. 3, 351--559.

Mochizuki, Takuro On the morphism of Duflo-Kirillov type. *J. Geom. Phys.* 41 (2002), no. 1-2, 73--113.

Bauer, Stefan; Furuta, Mikio A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I. *Invent. Math.* 155 (2004), no. 1, 1--19.

Furuta, M. Finite dimensional approximations in geometry. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, 395--403, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

会議等（代表者は毎年1，分担者はそれぞれ1つに限った。）

K. Fukaya, Multivalued Morse theory, asymptotic analysis and mirror symmetry, D. Sullivan Memorial conference, 2002 SUNY, Stony Brook. USA.

K. Fukaya, Homological Mirror Symmetry and Asymptotic Expansion of Special Function on Calabi Yau Manifolds, String 2003 Kyoto, 2003 July. Japan.

K. Fukaya, Loop space and Floer homology, Homological geometry - The mathematics behind non-commutative geometry (Franqui international conference) Brussel, 2004 Oct. Belgium.

K. Fukaya, Arnold Givental Conjecture, Holomorphic curve Workshop, Institute for advanced study Princeton, 2005 May. USA.

K. Fukaya, Transversality problem in Floer theory, String Topology in Morellia, 2006 Jan. Mexico

小野薫，フレアーホモロジーとフラックス予想，日本数学会年会，総合講演，（2005年3月）東京．日本．

H. Nakajima, Geometric construction of representations of affine algebras, International Congress of Math. Berlin 2002 Aug. (Prenary talk.) 中国.

太田啓史，「A無限大構造とラグランジュ部分多様体のフレアー理論」，日本数学会総合分科会，幾何学分科会特別講演，（2005年9月）．岡山．日本．

斉藤政彦．「モノドロミー保存変形とフロベニウス構造」，ミラー対称性城崎学校，（2002年9月）．城崎．日本．

加藤毅．「ミクロな写像間の相互作用からパターン形成に向けて」，微分幾何学シンポジウム，（2005年8月）．福岡．日本．

望月拓郎．「Harmonic bundle の漸近挙動」，日本数学会年会，総合講演，（2006年3月）．東京．日本．

M. Furuta. Finite dimensional approximations in geometry, International Congress of Math. Berlin 2002 Aug. (Invited talk.) 中国.