

平成17年度科学研究費補助金（基盤研究（S））研究状況報告書

ふりがな（ローマ字）		KOZONO HIDEO					
①研究代表者名氏		小菌 英雄		②所属研究機関・部局・職 東北大学・大学院理学研究科・教授			
③研究課題名	和文	非線形偏微分方程式の大域的可解性と解の漸近挙動に関する統一理論					
	英文	United theory of existence of global solution and its asymptotic behavior to the nonlinear partial differential equations					
④研究経費		平成15年度	平成16年度	平成17年度	平成18年度	平成19年度	総合計
17年度以降は内約額 金額単位：千円		14,400	11,500	10,800	10,800	13,500	61,000
⑤研究組織（研究代表者及び研究分担者）							
氏名	所属研究機関・部局・職	現在の専門	役割分担（研究実施計画に対する分担事項）				
小菌 英雄	東北大学・大学院理学研究科・教授	非線形偏微分方程式	研究の総括及び関数空間論の研究				
高木 泉	東北大学・大学院理学研究科・教授	非線形偏微分方程式	反応拡散系方程式の研究				
松村 昭孝	大阪大学・大学院情報科学研究科・教授	非線形偏微分方程式	流体力学の基礎方程式の研究				
林 仲夫	大阪大学・大学院理学研究科・教授	非線形発展方程式	非線形散乱理論の研究				
柳田 英二	東北大学・大学院理学研究科・教授	非線形解析学	力学系の研究				
小川 卓克	東北大学・大学院理学研究科・教授	非線形解析学	非線形波動方程式の研究				
石毛 和弘	東北大学・大学院理学研究科・助教授	非線形解析学	放物型方程式の研究				
⑥当初の研究目的（交付申請書に記載した研究目的を簡潔に記入してください。）							
<p>数理物理学の基礎方程式、生態系のモデルである非線形偏微分方程式を広く渡って対象とし、解の存在、一意性、安定性といった“適切性”を研究する。手法として、従来の関数解析学や変分学的なアプローチに加えて、調和解析学を取り入れることに本研究の特色がある。変分学の「峠の補題」、「concentration compactness」、調和解析学の Hardy・Besov 空間の理論等に見られる様に、非線形解析学は純粋数学と表裏一体となって研究が最近、急速に進歩している。このことは、94年の P.L.Lions（変分学的方法による非線形偏微分方程式の解法）、Bourugain（調和解析学方法による非線形偏微分方程式の解法）両氏のフィールズ賞受賞以来の強い流れである。実際、日本数学会における受賞分野も97年以来非線形解析部門が多く見られる。そこで、本研究ではこの3年間に基礎および応用解析学の強力なスタッフを揃えた東北大学数学教室をキーステーションとして、20世紀後半の目覚ましい解析学の成果を基礎に、非線形偏微分方程式の多岐に渡って、その局所的・大域的適切性を統一的に研究し、新世紀初頭に新たな理論を構築することを目指す。具体的には次の3つの研究班を構成して、個々の非線形偏微分方程式の解法に取り組む。</p> <p>1 流体力学の基礎方程式 ナビエ・ストークス方程式に関して未解決である時間大域的一意可解性の問題は、ミレニアム問題として提唱されている。本研究では粗い初期データのもとでの時間局所古典解が構成およびその時間期延長可能性に関して考察する。</p> <p>2 波動・分散型方程式 波動方程式に対しては“null form”と言われている代数的構造による非線形性の分類と方程式の可解性の関係を次元解析 (scaling invariance) の観点から統一的に論じたい。また最近、Fourier 制限ノルムの方法により、KdV 方程式、Benjamin-Ono 方程式を例に分散型方程式に対する従来の適切性の結果を改善したい。</p> <p>3 反応拡散方程式 競合、すみ分け、補食関係といった複数種の個体数の増減のダイナミクスを解析する数学のモデルとしては、非線形放物型方程式系を提唱する。安定な定常解の分類を変分法や最大値原理を用いて解析し、生物が存続するか、絶滅するかといった基礎的な問題に非線形偏微分方程式の理論を適用したい。</p>							

⑦これまでの研究経過 (研究の進捗状況について、必要に応じて図表等を用いながら、具体的に記入してください。)

1. Besov 空間における臨界 Sobolev 型不等式とその半線形偏微分方程式への応用

斉次 Besov 空間 $\dot{B}_{p,q}^s$ において、埋め込み不等式

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C\{1 + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^0} \log^{1-\frac{1}{r}}(e + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s})\}, \quad s > n/p, \quad 1 \leq q, r \leq \infty$$

を得た。これは Sobolev の不等式の臨界ケースを取り扱った Brezis-Gallouet, Brezis-Wainger, Ogawa-Ozawa 等による対数型不等式を含む形になっており、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式および調和写像流の方程式などの半線形発展方程式の解の正則性の証明に応用できる。

2. 無限遠方で減衰しない初期値に対する Navier-Stokes 方程式の局所古典解の存在

Navier-Stokes 方程式のエネルギー有限な解についてはこれまで多くの結果が得られているが、領域が非有界の場合、無限遠方で減衰しない解の研究は近年になって注目されるようになった。例えば、初期値が $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する関数の場合は、儀我等による古典的時間局所的な存在が示された (02 年)。 L^∞ においては特異積分作用素の有界性が保証されないため、ソレノイダル空間への射影作用素の取り扱いが著しく困難となる。儀我等は、Navier-Stokes 方程式の特殊な非線形構造に着目し、ハーディ空間とその双対空間ある BMO を駆使して $BUC(\mathbb{R}^n)$ に属する初期値に関して、時間局所解を構成した。

本研究では斉次ベゾフ空間における双線形評価と基本解の $L^p - L^q$ 評価を確立し L^∞ よりやや広いに $B_{\infty,\infty}^0$ 初期値をとる Navier-Stokes 方程式の時間局所解の一意存在定理を証明した。さらに、解の時間延長可能性について渦度が $\dot{B}_{\infty,\infty}^0$ に値をとる関数として可積分であれば十分であることを示した。

3. 弱 L^r 空間における Navier-Stokes 方程式の弱解の内部正則性

Ω を \mathbb{R}^3 の任意の開集合とし、時空間 $\Omega \times (0, T)$ における Navier-Stokes 方程式の弱解

$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ の内部正則性を考察した。ここで u に関しては Ω の境界 $\partial\Omega$ におけるいかなる仮も課していないことが重要である。これまで Navier-Stokes 方程式の弱解の内部正則性定理は、多くの場合 $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ すなわち、 $u|_{\partial\Omega} = 0$ を仮定し、 $\Omega \times (0, T)$ の部分領域に $D \times (a, b)$ におけるある種の付加条件のもとで、同部分領域 u における滑らかさを導出していた。このように対象となる領域の境界値を指定して、弱解の内部正則性を導くことは、通常非線形楕円型、放物型に対するものとは異なるが、Navier-Stokes 方程式の場合、いまひとつの未知関数 p (圧力) の制御のためにやむを得なかった。そこで、本研究では Serrin の提唱した渦度 $\omega = \text{rot } u$ の方程式に着目して、 u の境界条件を取り除くことに成功した。

実際、ある正定数 ε_0 が存在して $\|u\|_{L_w^s(0, T; L_w^r(\Omega))} \leq \varepsilon$ ならば、 $u \in L^\infty(D \times (a, b))$ であることが明らかにされた。

ここに、 r, s は条件 $2/s + 3/r = 1, 3 \leq s < \infty$ を満たし、 L_w^r は弱 L^r -空間を表す。応用として、弱解の孤立特異点の除去可能性定理が得られる。すなわち、 $(\chi_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ を中心とする放物型球

$Q_R(\chi_0, t_0) = \{(\chi, t); |\chi - \chi_0| < R, t - R^2 < t < t_0\}$ において

$$|u(\chi, t)| \leq \varepsilon_0 |t - t_0|^{-\theta/2} |\chi - \chi_0|^{-1+\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1$$

であれば、 $u \in L^\infty(Q_R(\chi_0, t_0))$ が従う。

4. 斉次 Triebel-Lizorkin 空間における双線形評価とその Navier-Stokes 方程式への応用

Navier-Stokes 方程式の初期値問題の局所可解性に関しては、これまでのところ Koch-Tataru による BMO^{-1} を初期データとしたものが一番広い関数空間における存在定理である。斉次 Triebel-Lizorkin 空間 $\dot{F}_{p,q}^s$ との比較においては $BMO^{-1} = \dot{F}_{\infty,2}^{-1}$ であることに注意すれば、構成された局所古典解 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ の延長可能性を斉次 Triebel-Lizorkin 空間において考察することは自然である。本研究では、 $\dot{F}_{p,\infty}^s$ における双線形評価

$$\|f \cdot g\|_{\dot{F}_{p,\infty}^s} \leq C(\|f\|_{\dot{F}_{p_1,\infty}^{s+\alpha}} \|g\|_{\dot{F}_{p_2,\infty}^{-\alpha}} + \|f\|_{\dot{F}_{r_1,\infty}^{-\beta}} \|g\|_{\dot{F}_{r_2,\infty}^{s+\beta}})$$

を導いた。

ここに、 $1 < p \leq \infty, s > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ であり、 $1 < p_1, p_2, r_1, r_2 \leq \infty$ は関係式 $1/p = 1/p_1 + p_2 = 1/r_1 + 1/r_2$ を満たすものとする。応用として、Navier-Stokes 方程式の $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ における古典解 u が条件

$$u \in L^s(0, T; \dot{F}_{\infty,\infty}^{-\alpha}), \quad 2/s = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

を満たせば、 $T' > T$ 存在して u は上 $(\mathbb{R}^n \times (0, T'))$ の古典解に延長可能であることが明らかにされる。尚、埋め込み $L^r \subset \dot{F}_{\infty,\infty}^{-n/r}$ に注意すれば、上式において $\alpha = n/r$ ととることにより、良く知られた Serrin のクラス $u \in L^s(0, T; L^r)$ における古典解の延長可能性定理が、我々の結果から従うことが分かる。

⑧特記事項 (これまでの研究において得られた、独創性・新規性を格段に発展させる結果あるいは可能性、新たな知見、学問的・学術的なインパクト等特記すべき事項があれば記入してください。)

1. Navier-Stokes 方程式の適切性と流体力学との関連

流体力学サイドにおいては、今日、計算機能力の飛躍的な進歩に伴って Navier-Stokes 方程式の解を数値実験によって求め、乱流をも含む様々な流れの場を矛盾なく説明しているようである。

一方、コンピューターを用いる以前に、まずは解析計算によって解の性質を調べようと試みる古典的な純粋数学の立場もある。本研究では、Navier-Stokes 方程式の数学サイドから研究を紹介し、ミレニアム問題を中心とした同方程式に関する課題を解説した。

とくに、「乱流の発生が解の正則性の崩壊と対応している」との数学者の見解と、多くの流体力学者によって指示されている「乱流の発生には解の特異性の議論は必要ない」との知見との比較を行った。

渦度が有限でとどまる限り、解の正則性が保証されることに注目し、乱流発生が渦度の挙動と密接な関係にあることを偏微分方程式の適切性に関する研究から解き明かした。

2. 自由度 2 の渦度ベクトル束縛による Navier-Stokes 方程式の時間局所古典解の延長可能性と乱流発生メカニズムの解明

乱流は流体力学における主要なテーマであるが、数学的に妥当な定義は未だにされていない。

カオスやフラクタルといった確率論におけるモデルは、乱流を数学的に説明できるものとして久しく期待されて来た。カオスの特徴は、初期における小さな擾乱が時間経過と共に発達しやがて多くの自由度をもつ“混沌”に至るということである。このことは、円柱のまわりの一様流から出発してカルマン渦列を発生し、やがて乱流状態に至る現象をよく説明しているように思われる。本研究ではこの乱流の解釈に対する一つのアンチ・テーゼを Navier-Stokes 方程式の時間局所古典解の延長可能性に対するある種の指標によって提唱した。すなわち乱流の発生が渦運動の不規則性ととらえるならば、カオス的な乱流の解釈では初期の渦の制御によっては乱流発生を抑えることは不可能である。しかし、研究代表者は 3 次元空間における流体運動においても、渦度ベクトル 2 成分の挙動を束縛し自由度 1 のスカラー関数とすることにより、2 次元平面の流れと同様に扱うことが可能であることを証明した。

実際、3 次元空間における Navier-Stokes 方程式の解の挙動は渦度ベクトル $\text{rot } u \equiv \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ によって支配される。解の特異点の発生に関して、偏微分方程式論の立場から考察した Beale-Kato-Majda の結果は有名である。実際、彼らは時間 $(0, T)$ で滑らかな解 $u(t)$ が条件 $\int_0^T \sum_{i=1}^3 \|\omega_i(t)\|_{L^\infty} dt < \infty$ を満たしていれば、 $u(t)$ は時刻 $t = T$ を越えて滑らかな解として延長可能であることを証明した。本研究では、このような古典解の時間延長には渦度ベクトルの 3 成分 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ すべてを束縛する必要はなく、自由度 2 の制限 $\int_0^T \sum_{i=1}^2 \|\omega_i(t)\|_{BMO} dt < \infty$ で十分であることを示した。また、Beale-Kato-Majda が定式化した L^∞ 空間より広い BMO 関数により延長可能性が判定できることを証明したことは、調和解析学の視点からの数学的な改良であると言えよう。

3. 非線形放物型方程式の解の漸近挙動に種々のダイナミックスの解明

フロントと呼ばれる遷移層の振る舞いは、Fisher 型方程式の解のダイナミックスと密接な関係にある。本研究では、同方程式の初期値の取り方によっては時間的にも空間的にも極めて複雑な振る舞いする遷移層の発生を検出した。

また 3 つの相が 3 重結合を持つ界面によって隔てられている場合について、その定常状態が存在するための条件について調べた。これは、古典的な最適化問題である Fermat-Steiner 問題と関連しているが、自由度が大きい分だけ困難になり、現代的な視点から見ても興味深い問題であろう。実際、存在を示す過程で、その不安定次元との関連が自然に導かれることを明らかにした。

⑨研究成果の発表状況 (この研究費による成果の発表に限り、学術誌等に発表した論文(掲載が確定しているものを含む。)の全著者名、論文名、学協会誌名、巻(号)、最初と最後のページ、発表年(西暦)、及び国際会議、学会等における発表状況について記入してください。なお、代表的な論文3件に○を、また研究代表者に下線を付してください。)

- ① Kozono, Hideo; Shimada, Yukihiro Bilinear estimates in homogeneous Triebel-Lizorkin spaces and the Navier-Stokes equations. *Math. Nachr.* **276** (2004), 63--74.
- ② Kim, Hyunseok; Kozono, Hideo Interior regularity criteria in weak spaces for the Navier-Stokes equations. *Manuscripta Math.* **115** (2004), no. 1, 85--100.
- ③ Kozono, Hideo; Yatsu, Naoki Extension criterion via two-components of vorticity on strong solutions to the 3D Navier-Stokes equations. *Math. Z.* **246** (2004), no. 1-2, 55--68.
4. Kozono, Hideo; Ogawa, Takayoshi; Taniuchi, Yasushi Navier-Stokes equations in the Besov space near L^∞ and BMO. *Kyushu J. Math.* **57** (2003), no. 2, 303--324.
5. 小藺英雄; 乱流の数理 パリティ **18** 卷 (2003), 28--35.
6. Kozono, H., Remark on the paper by S.Dubois "Mild solutions to the Navier-Stokes equations and energy equality". *Differential and Integral Equations* **16** (2003), 583--585.
7. Nagasawa, Takeyuki; Takagi, Izumi Bifurcating critical points of bending energy under constraints related to the shape of red blood cells. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **16** (2003), no. 1, 63--111.
8. Huang, Feimin; Matsumura, Akitaka; Shi, Xiaoding Viscous shock wave to a gas-solid free boundary problem for compressible gas. *SIAM J. Math. Anal.* **36** (2004), no. 2, 498--522
9. Huang, Feimin; Matsumura, Akitaka; Shi, Xiaoding On the stability of contact discontinuity for compressible Navier-Stokes equations with free boundary. *Osaka J. Math.* **41** (2004), no. 1, 193--210.
10. Huang, Feimin; Matsumura, Akitaka; Shi, Xiaoding A gas-solid free boundary problem for a compressible viscous gas. *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2003), no. 6, 1331--1355
11. Huang, Feimin; Matsumura, Akitaka; Shi, Xiaoding Viscous shock wave and boundary layer solution to an inflow problem for compressible viscous gas. *Comm. Math. Phys.* **239** (2003), no. 1-2, 261--285.
12. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Asymptotics of solutions for subcritical non-convective type equations. *Math. Methods Appl. Sci.* **28** (2005), no. 3, 275--308.
13. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Asymptotics for critical nonconvective type equations. *Int. J. Math. Math. Sci.* **2004**, no. 5-8, 377--405.
14. Hayashi, Nakao; Naumkin, Pavel I. On the asymptotics for cubic nonlinear Schrödinger equations. *Complex Var. Theory Appl.* **49** (2004), no. 5, 339--373.
15. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Damped wave equation with a critical nonlinearity on a half line. *J. Anal. Appl.* **2** (2004), no. 2, 95--112.
16. Hayashi, Nakao; Ito, Naoko; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. On some nonlinear dissipative equations with sub-critical nonlinearities. Proceedings of Third East Asia Partial Differential Equation Conference. *Taiwanese J. Math.* **8** (2004), no. 1, 135--154.
17. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Damped wave equation with supercritical nonlinearities. *Differential Integral Equations* **17** (2004), no. 5-6, 637--652.
18. Hayashi, Nakao; Naumkin, Pavel I.; Shimomura, Akihiro; Tonegawa, Satoshi Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in one and two dimensions. *Electron. J. Differential Equations* **2004**, No. 62, 16 pp.
19. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line. North-Holland Mathematics Studies, 194. *Elsevier Science B.V., Amsterdam*, 2004.
- Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Guardado Zavala, J. L. On the boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **459** (2003), no. 2039, 2861--2884.
20. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Global existence and time decay of small solutions to the Landau-Ginzburg type equations. *J. Anal. Math.* **90** (2003), 141--173.
21. Hayashi, Nakao; Naumkin, Pavel I. Asymptotics for the Burgers equation with pumping. *Comm. Math. Phys.* **239** (2003), no. 1-2, 287--307.
22. Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I.; Naumkin, Pavel I. Landau-Ginzburg type equations in the subcritical case. *Commun. Contemp. Math.* **5** (2003), no. 1, 127--145.

23. Hayashi, Nakao; Mizumachi, Tetsu; Naumkin, Pavel I. Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D. *Differential Integral Equations* **16** (2003), no. 2, 159-179.
24. Moriyama, Kazunori; Tonegawa, Satoshi; Tsutsumi, Yoshio Wave operators for the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity of low degree in one or two space dimensions. *Commun. Contemp. Math.* **5** (2003), no. 6, 983-996.
25. Tsutsumi, Yoshio Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations. *Funkcial. Ekvac.* **46** (2003), no. 1, 41-62.
26. Tsutsumi, Yoshio Global solutions for the Dirac-Proca equations with small initial data in $3+1$ space time dimensions. *J. Math. Anal. Appl.* **278** (2003), no. 2, 485-499.
27. Poláčik, P.; Yanagida, E. A Liouville property and quasiconvergence for a semilinear heat equation. *J. Differential Equations* **208** (2005), no. 1, 194-214.
28. Kabeya, Yoshitsugu; Yanagida, Eiji Uniqueness and profile of solutions for a superlinear elliptic equation. *Adv. Differential Equations* **9** (2004), no. 7-8, 771-796.
29. Fila, Marek; Winkler, Michael; Yanagida, Eiji Grow-up rate of solutions for a supercritical semilinear diffusion equation. *J. Differential Equations* **205** (2004), no. 2, 365-389.
30. Poláčik, P.; Yanagida, E. Nonstabilizing solutions and grow-up set for a supercritical semilinear diffusion equation. *Differential Integral Equations* **17** (2004), no. 5-6, 535-548.
31. Yanagida, Eiji; Yotsutani, Shoji Recent topics on nonlinear partial differential equations: structure of radial solutions for semilinear elliptic equations *Selected papers on analysis and differential equations*, 121-137, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 211,
32. Poláčik, Peter; Yanagida, Eiji On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation. *Math. Ann.* **327** (2003), no. 4, 745-771.
33. Yagisita, Hiroki; Yanagida, Eiji A remark on stable subharmonic solutions of time-periodic reaction-diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.* **286** (2003), no. 2, 795-803.
34. Ikota, Ryo; Yanagida, Eiji A stability criterion for stationary curves to the curvature-driven motion with a triple junction. *Differential Integral Equations* **16** (2003), no. 6, 707-726.
35. Kuwamura, Masataka; Yanagida, Eiji The Eckhaus and zigzag instability criteria in gradient/skew-gradient dissipative systems. *Phys. D* **175** (2003), no. 3-4, 185-195.
36. Hosono, Takafumi; Ogawa, Takayoshi Large time behavior and L^p - L^q estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations. *J. Differential Equations* **203** (2004), no. 1, 82-118.
37. Ogawa, Takayoshi; Yokota, Tomomi Uniqueness and inviscid limits of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation in a two-dimensional domain. *Comm. Math. Phys.* **245** (2004), no. 1, 105-121.
38. Ogawa, Takayoshi; Taniuchi, Yasushi The limiting uniqueness criterion by vorticity for Navier-Stokes equations in Besov spaces. *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), no. 1, 65-77.
39. Ishige, Kazuhiro; Mizoguchi, Noriko Blow-up problems for a kind of nonlinear heat equations. (Japanese) *Sugaku* **56** (2004), no. 2, 182-192.
40. Arisawa, Mariko; Giga, Yoshikazu Anisotropic curvature flow in a very thin domain. *Indiana Univ. Math. J.* **52** (2003), no. 2, 257-281.
41. Arisawa, Mariko Long time averaged reflection force and homogenization of oscillating Neumann boundary conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2003), no. 2, 293-332.